PROCESAREA SEMNALELOR - CURS 10

SERII DE TIMP - DETALII DE MODELARE

Cristian Rusu

CUPRINS

- **mediere exponențială**
- **modele MA**
- **modele ARMA**

MODELUL AR

- folosim modelul AR și faptul că ne dorim $y[i] \approx \hat{y}[i]$ pentru fiecare i

$$\begin{bmatrix} y[i] \\ y[i-1] \\ y[i-2] \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[i-1] & y[i-2] \\ y[i-2] & y[i-3] \\ y[i-3] & y[i-4] \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- scris echivalent $\mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{x}$

- ce dimensiune are fiecare variabilă?
  - $\mathbf{y}$ este $m \times 1$
  - $\mathbf{Y}$ este $m \times p$
  - $\mathbf{x}$ este $p \times 1$

- m se numește orizontul de timp
- p este dimensiunea modelului AR

MODELUL AR

- folosim modelul AR și faptul că ne dorim $y[i] \approx \hat{y}[i]$ pentru fiecare i

$$\begin{bmatrix} y[i] \\ y[i-1] \\ y[i-2] \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y[i-1] & y[i-2] \\ y[i-2] & y[i-3] \\ y[i-3] & y[i-4] \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- scris echivalent $\mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{x}$

- soluția: $\mathbf{x}^\star = \mathbf{Y}^\dagger \mathbf{y} = (\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})^{-1}\mathbf{Y}^T\mathbf{y}$

- predicția la pasul următor este: $\hat{y}[i+1] = (\mathbf{x}^\star)^T \begin{bmatrix} y[i] \\ y[i-1] \\ \vdots \\ y[i-p+1] \end{bmatrix}$

MODELUL AR

- cum alegem dimensiunea p a modelului AR?

MODELUL AR

- cum alegem dimensiunea p a modelului AR?
  - metoda clasică este să folosim funcția de auto-corelație parțială
  - încercăm mai multe valori și verificăm valorile erorilor de predicție
  - considerăm p un hiper-parametru, cross-validation
  - fixăm un p foarte mare, dar apoi cerem ca soluția $\mathbf{x}$ să aibă zerouri
    - un algoritm greedy
    - regularizare $\|\mathbf{Y}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1$

STAȚIONARITATEA

- caracteristicile statistice ale seriei de timp nu se modifică în timp
  - media nu se modifică semnificativ în timp
  - deviația standard nu se modifică semnificativ în timp
  - seria de timp nu are o componentă sezonieră puternică
- de ce avem nevoie de aceste caracteristici pentru ca modele ARMA să funcționeze?
- ce facem dacă aceste presupuneri nu sunt îndeplinite?

RĂDĂCINI ALE UNITĂȚII

- presupunem că avem seria de timp

$$
\begin{aligned}
y[t] &= \alpha y[t-1] + \epsilon_t \\
&= \alpha^t y[0] + \sum_{k=0}^{t-1} \alpha^k \epsilon_{t-k}
\end{aligned}
$$

- care este media seriei de timp?

- care este deviația standard a seriei de timp?

RĂDĂCINI ALE UNITĂȚII

- presupunem că avem seria de timp

$$
\begin{aligned}
y[t] &= \alpha y[t-1] + \epsilon_t \\
&= \alpha^t y[0] + \sum_{k=0}^{t-1} \alpha^k \epsilon_{t-k}
\end{aligned}
$$

- care este media seriei de timp?

$$E[y[t]] = \alpha E[y[t-1]] = \alpha^2 E[y[t-2]] = \ldots = \alpha^t y[0]$$

- care este deviația standard a seriei de timp?

RĂDĂCINI ALE UNITĂȚII

- presupunem că avem seria de timp

$$
\begin{aligned}
y[t] &= \alpha y[t-1] + \epsilon_t \\
&= \alpha^t y[0] + \sum_{k=0}^{t-1} \alpha^k \epsilon_{t-k}
\end{aligned}
$$

- care este media seriei de timp?

$$E[y[t]] = \alpha E[y[t-1]] = \alpha^2 E[y[t-2]] = \ldots = \alpha^t y[0]$$

- care este deviația standard a seriei de timp?

$$\text{var}(y[t]) = \sigma^2(\alpha^0 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2(t-1)})$$

RĂDĂCINI ALE UNITĂȚII

- care este media seriei de timp?

$$E[y[t]] = \alpha E[y[t-1]] = \alpha^2 E[y[t-2]] = \ldots = \alpha^t y[0]$$

- care este deviația standard a seriei de timp?

$$\mathrm{var}(y[t]) = \sigma^2(\alpha^0 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2(t-1)})$$

- ce se întâmplă dacă $|\alpha| < 1, t \to \infty$?

$$E[y[t]] \to ?$$

$$\mathrm{var}(y[t]) \to ?$$

RĂDĂCINI ALE UNITĂȚII

- care este media seriei de timp?

$$E[y[t]] = \alpha E[y[t-1]] = \alpha^2 E[y[t-2]] = \ldots = \alpha^t y[0]$$

- care este deviația standard a seriei de timp?

$$\text{var}(y[t]) = \sigma^2(\alpha^0 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2(t-1)})$$

- ce se întâmplă dacă $|\alpha| < 1, t \to \infty$?

$$E[y[t]] \to 0$$

$$\text{var}(y[t]) \to \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$$

RĂDĂCINI ALE UNITĂȚII

- care este media seriei de timp?

$$E[y[t]] = \alpha E[y[t-1]] = \alpha^2 E[y[t-2]] = \ldots = \alpha^t y[0]$$

- care este deviația standard a seriei de timp?

$$\text{var}(y[t]) = \sigma^2(\alpha^0 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2(t-1)})$$

- ce se întâmplă dacă $|\alpha| > 1, t \to \infty$?

$$E[y[t]] \to ?$$
$$\text{var}(y[t]) \to ?$$

RĂDĂCINI ALE UNITĂȚII

- care este media seriei de timp?

$$E[y[t]] = \alpha E[y[t-1]] = \alpha^2 E[y[t-2]] = \ldots = \alpha^t y[0]$$

- care este deviația standard a seriei de timp?

$$\text{var}(y[t]) = \sigma^2(\alpha^0 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2(t-1)})$$

- ce se întâmplă dacă $|\alpha| > 1, t \to \infty$?

$$E[y[t]] \to \pm\infty$$
$$\text{var}(y[t]) \to +\infty$$

RĂDĂCINI ALE UNITĂȚII

- care este media seriei de timp?

$$E[y[t]] = \alpha E[y[t-1]] = \alpha^2 E[y[t-2]] = \ldots = \alpha^t y[0]$$

- care este deviația standard a seriei de timp?

$$\text{var}(y[t]) = \sigma^2(\alpha^0 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2(t-1)})$$

- ce se întâmplă dacă $|\alpha| = 1, t \to \infty$?

$$E[y[t]] \to ?$$
$$\text{var}(y[t]) \to ?$$

RĂDĂCINI ALE UNITĂȚII

- care este media seriei de timp?

$$E[y[t]] = \alpha E[y[t-1]] = \alpha^2 E[y[t-2]] = \ldots = \alpha^t y[0]$$

- care este deviația standard a seriei de timp?

$$\text{var}(y[t]) = \sigma^2(\alpha^0 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2(t-1)})$$

- ce se întâmplă dacă $|\alpha| = 1, t \rightarrow \infty$?

$$E[y[t]] \rightarrow y[0]$$
$$\text{var}(y[t]) \rightarrow t\sigma^2$$

CONDIȚIA DE STAȚIONARITATE

- pentru un model AR(p) avem:

$$
\begin{aligned}
y[t] &= x_1 y[t-1] + x_2 y[t-2] + \ldots + x_p y[t-p] + \epsilon_t \\
&= \sum_{i=1}^{p} x_i y[t-i] + \epsilon_t \\
&= \sum_{i=1}^{p} x_i L^i y[t] + \epsilon_t
\end{aligned}
$$

- aici, L poartă numele de operator de întârziere (lag)

$$f(L)y[t] = \epsilon_t,$$

$$f(L) = 1 - x_1 L - x_2 L^2 - \ldots - x_p L^p$$

- $f(L)$ se numește ecuația caracteristică a modelului AR(p)

CONDIȚIA DE STAȚIONARITATE

- pornim de la:

$$f(L)y[t] = \epsilon_t,$$
$$f(L) = 1 - x_1L - x_2L^2 - \ldots - x_pL^p$$

- observați că avem

$$\begin{aligned} y[t] &= \frac{1}{L}\epsilon_t \\ &= z_0\epsilon_t + z_1L\epsilon_t + z_2L^2\epsilon_t + z_3L^2\epsilon_t + \ldots \\ &= z_0\epsilon_t + z_1\epsilon_{t-1} + z_2\epsilon_{t-2} + z_3\epsilon_{t-3} + \ldots \end{aligned}$$

- acesta este un model MA(∞)

CONDIȚIA DE STAȚIONARITATE

- pornim de la:

$$f(L)y[t] = \epsilon_t,$$
$$f(L) = 1 - x_1 L - x_2 L^2 - \ldots - x_p L^p$$

- ne interesează rădăcinile acestui polinom în L

$$f(L) = 0$$

- dacă toate rădăcinile acestui polinom sunt în afară cercului unitate atunci spunem despre seria de timp că este staționară

CONDIȚIA DE STAȚIONARITATE

- pornim de la:

$$f(L)y[t] = \epsilon_t,$$
$$f(L) = 1 - x_1 L - x_2 L^2 - \ldots - x_p L^p$$

- ne interesează rădăcinile acestui polinom în L

$$f(L) = 0$$

- exemplu 1:

$$y[t] = \frac{1}{2}y[t-1] + \epsilon_t$$
$$y[t] = \frac{1}{2}Ly[t] + \epsilon_t$$
$$\left(1 - \frac{1}{2}L\right)y[t] = \epsilon_t$$

- deci avem soluția $L = 2$
- dacă toate rădăcinile acestui polinom sunt în afară cercului unitate atunci spunem despre seria de timp că este staționară

CONDIȚIA DE STAȚIONARITATE

- pornim de la:

$$f(L)y[t] = \epsilon_t,$$
$$f(L) = 1 - x_1 L - x_2 L^2 - \ldots - x_p L^p$$

- ne interesează rădăcinile acestui polinom în L

$$f(L) = 0$$

- exemplu 2:

$$y[t] = 5y[t-1] + 3y[t-2] + \epsilon_t$$
$$y[t] = 5Ly[t] + 3L^2 y[t] + \epsilon_t$$
$$\left(1 - 5L - 3L^2\right) y[t] = \epsilon_t$$

- deci avem soluțile $L \in \{-1.8,\ 0.18\}$
- dacă toate rădăcinile acestui polinom sunt în afară cercului unitate atunci spunem despre seria de timp că este staționară

CONDIȚIA DE STAȚIONARITATE

- cum calculăm rădăcinile unei polinom?

CONDIȚIA DE STAȚIONARITATE

- cum calculăm rădăcinile unei polinom?
- dacă avem un polinom $p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$
- vom crea matricea companion

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

- valorile proprii ale acestei matrice sunt rădăcinile polinomului $p(x)$

DATA VIITOARE

- modele ne-parametrice pentru serii de timp